1. Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad |x - y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

2. Potęgi i pierwiastki

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n–tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
- dla $a \geq 0$: $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. Wyrażenia algebraiczne

Wyrażenie algebraiczne – kilka zmiennych (liter) i/lub stałych (liczb)połączonych ze sobą znakami działań i nawiasami Może to być także pojedyncza liczba lub litera. Przyjmuje nazwę od ostatniego wykonanego działania.

Jednomian – pojedyncze liczby lub zmienne oraz ich iloczyny.
Jest uporządkowany, jeśli jego pierwszym czynnikiem jest liczba, a następnym są zmienne występujące w porządku alfabetycznym.

Suma algebraiczna – suma jednomianów.

Wyrazy podobne – wyrazy sumy algebraicznej, które mogą różnić się od się od siebie tylko współczynnikami liczbowymi.

Redukcja wyrazów podobnych – przekształcenie sumy algebraicznej, polegające na dodaniu kilku wyrazów podobnych.

Aby **pomnożyć sumę algebraiczną przez liczbę**, mnożymy każdy składnik sumy przez tę liczbę i otrzymane iloczyny dodajemy.
Np. 2(y + x) = 2y + 2x

Aby pomnożyć przez siebie dwie sumy algebraiczne, należy każdy składnik pierwszej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy, a następnie zredukować wyrazy podobne.
Np. (2x-1)(3+y) = 6x+2xy-3-y

Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \qquad a^3 - 1 = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \qquad a^3 + 1 = (a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$$

$$a^n - 1 = (a-1)\left(1 + a + \ldots + a^{n-1}\right)$$

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias polega na umieszczeniu największego wspólnego dzielnika składników sumy algebraicznej poza nawiasem i wpisaniu do nawiasu ilorazów poszczególnych składników przez w/w dzielnik
Np. 6ab+8ac = 2a(3b+4c)

4. Liczby

liczby naturalne - wszystkie liczby całkowite nieujemne np.0,1,..., n, n+1,..

liczby całkowite - wszystkie liczby naturalne i liczby do nich przeciwne. np. 1,2,3,-5,-2,...

liczby wymierne - wszystkie liczby, które można zapisać w postaci ułamka zwykłego o liczniku i mianowniku całkowitym; mianownik musi być liczbą różną od zera.

liczby niewymierne - wszystkie, których nie da się zapisać w postaci ułamka p/q gdzie p,q $\in$ C oraz q $\neq$ 0.np liczba π

liczby rzeczywiste – wszystkie liczby wymierne i niewymierne. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy przez R.

Liczby pierwsze – liczby naturalne większe od 1, które oprócz jedynki i samej siebie nie mają żadnych innych dzielników np.: 2,3,5,7,11,13….

Liczby złożone – liczby, które mają więcej niż dwa dzielniki.

Liczby odwrotne – liczby, których iloczyn wynosi 1.

Liczby przeciwne – liczby, których suma wynosi 0; są położone po różnych stronach zera na osi liczbowej ale w jednakowej od niego odległości.

Jeżeli w rozkładzie mianownika ułamka na czynniki pierwsze występują tylko liczby 2 lub 5, to ten ułamek ma **rozwinięcie dziesiętne skończone**.
Jeżeli w rozkładzie tym występuje jakaś inna liczba to ułamek ma **rozwinięcie dziesiętne nieskończone**.
Reguła ta dotyczy ułamka w postaci nieskracalnej.

Jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę zostawiamy bez zmian – **przybliżenie z niedomiarem.**
Np. 4,5433 $\approx$ 4,54

Jeżeli pierwsza z odrzuconych cyfr jest większa od 5 lub równa, to ostatnią zachowaną cyfrę zwiększamy o 1 – **przybliżenie z nadmiarem**.
Np. 4,546 $\approx$ 4,55

$\pi \approx 3{,}14$

$\pi \approx 22/7$

Rozkład liczby na czynniki pierwsze – jest to zapisanie liczby złożonej jako iloczynu liczb pierwszych. Np.:

12 | 2 ; 65 | 5
6 | 2 13 | 13
3 | 3 1 | 1
1 | 1

Największy wspólny dzielnik – NWD liczb 48 i 72 .

48 | **2**	72 | **2**	
24 | **2**	36 | **2**	NWD = **2** x **2** x **2** x **3** = **24**
12 | **2**	18 | **2**	
6 | 2	9 | **3**	
3 | **3**	3 | 3	
1 | 1	1 |1	

Najmniejsza wspólna wielokrotność – NWW liczb 48 i 72 .

NWW = 48 x 3= 72 x 2 =**144**

Cechy podzielności liczb przez: 2, 3, 4, 5, 9, 10 .

Liczba jest podzielna przez:

a) 2, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6, 8.
b) 3, jeżeli suma cyfr liczby jest podzielna przez 3.
c) 4, gdy dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4.
d) 5, gdy ostatnią cyfrą liczby jest 0 lub 5.
e) 9, gdy suma cyfr liczby dzieli się przez 9.
f) 10, gdy liczba zakończona jest na 0.

5. Procenty

Procent - setna cześć całości. 1**%**=1/100=0.01
Promil - tysięczna cześć całości. 1**‰**=0.001
Aby **procent zamienić na promil** należy ilość procentów pomnożyć przez 10, np.
1% = (1 x 10)**‰ = 10‰**
Aby **promil zamienić na procent** należy ilość promili podzielić przez 10.
15‰ = (15 : 10)% = 1.5%
Aby **procent zamienić na liczbę**, należy ją podzielić przez 100. np.5% = 5/100
Aby **liczbę zamienić na procent** należy ją pomnożyć przez 100 i dopisać symbol %. 3 x 100%= 300 %
Aby **obliczyć procent z danej liczby** należy pomnożyć liczbę przez procent, np.
47 % liczby 200 obliczymy : 47/100 x 200 = 94
Aby **obliczyć liczbę z danego procentu** należy ją podzielić przez ten procent, np. jeżeli 20% pewnej liczby wynosi 30, to liczbę tę znajdziemy następująco: 30 : 20% = 150 (lub też rozwiązując równanie 20%x = 30)
Aby **obliczyć jakim procentem liczby A jest liczba B** należy wykonać działanie B/A x 100%.
Stężenie - zawartość (wyrażona w procentach) danej substancji w roztworze. Próba stopu jest to masa kruszcu dzielona przez masę całego stopu (wyrażona w promilach).

$$D = \frac{k \cdot t \cdot p}{100}$$

D – odsetki k- kapitał t - czas wyrażony w latach p- ilość procentów

6. Równania, nierówności i układy równań

Równanie tożsamościowe – spełnia je każda liczba podstawiona w miejsce niewiadomej, czyli ma ono nieskończenie wiele rozwiązań.

Równanie sprzeczne – nie istnieje liczba która mogłaby spełnić to równanie.

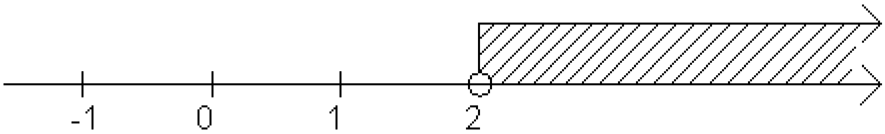
Równania, nierówności i układy równań są równoważne, jeżeli mają takie same rozwiązania (zbiory rozwiązań)

Proporcja – jest to równość dwóch ułamków.

Podstawowa **własność proporcji** – iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych, tzn. że gdy **a : b = c : d** to **ad =bc**

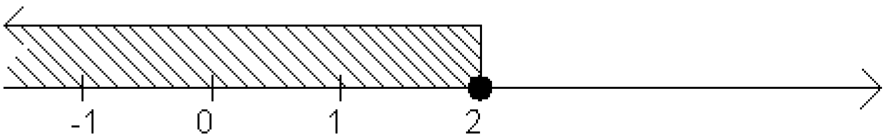
Nierówność ostra – (> lub <) dla $x > 2$, przedział liczbowy obustronnie otwarty

$X \in (2 ; +\infty)$:

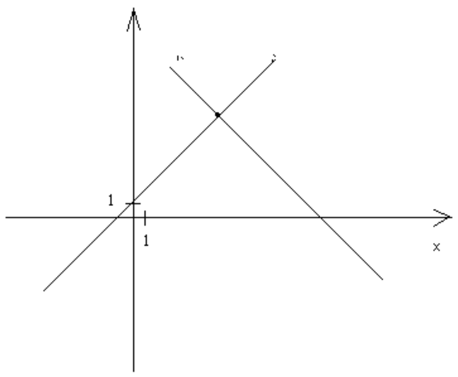


Nierówność słaba – ($\geq$ lub $\leq$) dla $x \leq 2$, przedział liczbowy jednostronnie domknięty

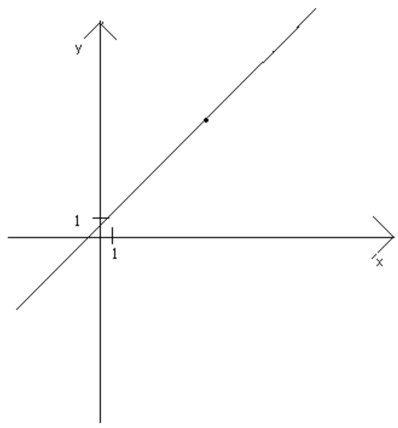
$X \in (-\infty ; 2)$:



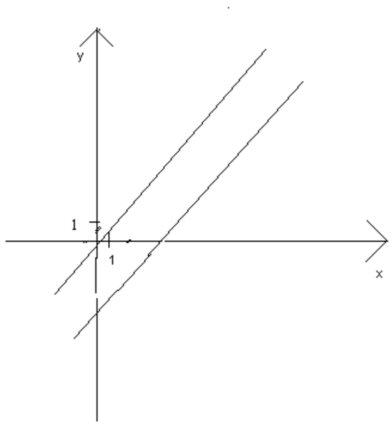
Układ równań nazywamy **oznaczonym (u.r. niezależnych)** jeśli ma on jedno rozwiązanie. W interpretacji geometrycznej są to współrzędne punktu, w którym przecinają się proste ilustrujące poszczególne równania.



Układ równań nazywamy **nieoznaczonym (u.r. zależnych)**, jeśli ma nieskończenie wiele rozwiązań. W interpretacji geometrycznej są to współrzędne punktów leżących na prostej będącej ilustracją obu równań układu..



Układ równań jest sprzeczny, jeśli nie ma rozwiązań. W interpretacji geometrycznej ilustracją są dwie proste równoległe.



7. Funkcje

Funkcja – Jeżeli dane są dwa zbiory, A i B, i każdemu elementowi ze zbioru A, przyporządkujemy dokładnie jeden element ze zbioru B, to takie przyporządkowanie nazywamy funkcją określoną na zbiorze A i o wartościach w zbiorze B.

Zbiór A nazywamy **dziedziną funkcji**, a jego elementy **argumentami funkcji.**

Zbiorem wartości funkcji nazywamy zbiór B, jego elementy to wartości funkcji.

Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta. Wykresem funkcji liniowej $y = ax$ (tzn. $b = 0$) jest prosta przechodząca przez punkt $0 = (0;0)$ i przez punkt $(1;a)$.

Współczynnik a, funkcji liniowej $y = ax + b$ dla $x \in R$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym prostej**, która jest wykresem tej funkcji. Jeżeli $a > 0$ to f. liniowa jest rosnąca, jeżeli $a = 0$ to jest stała, a gdy $a <0$ to f. liniowa jest malejąca.

Współrzędne przecięcia się wykresu funkcji liniowej z osią **OX:** $(-b/a;0)$

Współrzędne przecięcia się wykresu funkcji liniowej z osią **OY:** $(0;b)$

Warunek równoległości prostych
Dwie proste są równoległe wtedy, gdy mają taki sam współczynnik liczbowy „a”

Równanie prostej: $y = ax + b$

Miejscem zerowym funkcji nazywamy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość zero.
Aby obliczyć miejsce zerowe funkcji znając jej wzór, wystarczy, że zamiast y wstawimy 0 i rozwiążemy dane równanie.

Funkcja rosnąca to taka, w której wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości.

Funkcja malejąca to taka, w której wraz ze wzrostem argumentów, wartości maleją.

Funkcja stała - funkcja, która przyjmuje tę samą wartość niezależnie od wybranego argumentu.

Funkcję f określoną na zbiorze liczb rzeczywistych wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq0$, nazywamy **funkcją kwadratową**. Jej wykresem jest parabola.

Funkcją wymierną nazywamy funkcję określoną wzorem: W1 / W2, gdzie W1, W2 są wielomianami. Jej wykresem jest hiperbola.
Dziedziną funkcji wymiernej jest $R \setminus A$, gdzie A jest zbiorem wszystkich miejsc zerowych wielomianu W2

Wielkości x i y są **wprost proporcjonalne**, gdy ich iloraz jest stały. Iloraz ten jest współczynnikiem proporcjonalności prostej.

Taki związek jak w proporcjonalności prostej wyrażamy wzorem **y = a x (tzn, że a = y/x)** gdzie a jest daną stałą liczbą dodatnią zwaną współczynnikiem proporcjonalności.

Wykresem proporcjonalności prostej jest prosta.

Dwie wielkości nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, jeśli ich iloczyn jest stały.

Stały iloczyn a = xy tych wielkości nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej**.

W układzie współrzędnych proporcjonalność odwrotną interpretuje **hiperbola** o równaniu y = a/x.

Oś liczbową pionową y nazywamy **osią rzędnych**. Rzędna punktu to druga współrzędna punktu.

Oś liczbową poziomą x nazywamy **osią odciętych**. Odcięta punktu to pierwsza współrzędna punktu.

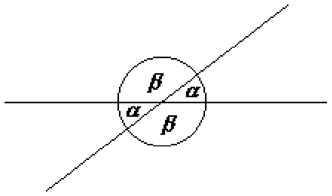
8. Geometria

Kąt - część płaszczyzny ograniczona dwiema pół prostymi o wspólnym początku., wraz z tymi półprostymi. Kąty oznaczamy literami alfabetu greckiego.

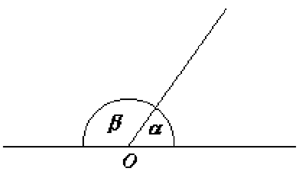
Kąt pełny = 360°

Kąt półpełny = 180°

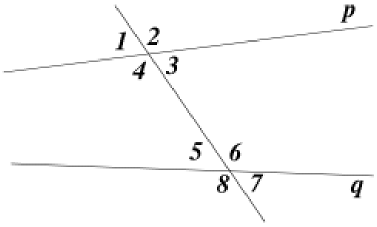
Jeżeli przetną się dwie proste to otrzymamy dwie pary kątów wierzchołkowych. **Kąty wierzchołkowe** mają taką samą miarę.



Dwa kąty są przyległe, jeżeli mają wspólny wierzchołek oraz jedno ramię, a drugie ich ramiona uzupełniają się do prostej. Suma kątów przyległych wynosi 180°.



Jeżeli dwie dowolne proste przetniemy trzecią prostą to otrzymamy cztery pary **kątów naprzemianległych** i odpowiadających.



Pary kątów 1 i 7 oraz 2 i 8 to kąty naprzemianległe **zewnętrzne**, pary 4 i 6 oraz 3 i 5 to kąty naprzemianległe **wewnętrzne**.

Pary 1 i 5; 4 i 8; 2 i 6 oraz 3 i 7 to **kąty odpowiadające.**

Kąt wypukły : 0° < **α** ≤180°

Kąt wklęsły = 180° < **α** < 360°

Dwusieczna kąta – półprosta wychodzącą z jego wierzchołka dzieląca ten kąt na dwie równe części; jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od obu ramion kąta.

Symetralna odcinka - prosta do niego prostopadła dzieląca ten odcinek na dwie równe części; jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od końców odcinka.

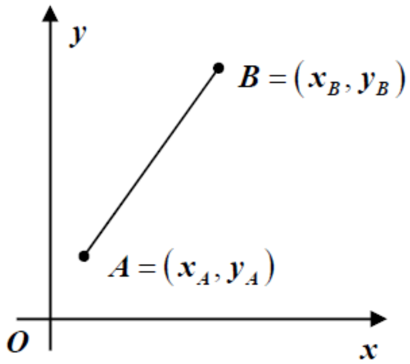
- Odcinek

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$



- **Prosta**

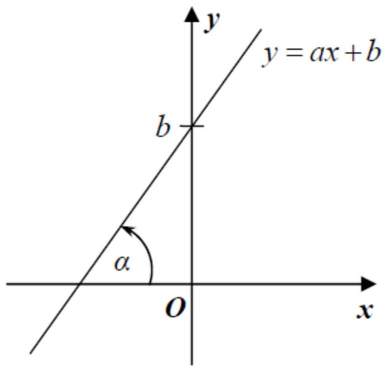
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg}\alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.



- Para prostych

Dwie proste o równaniach kierunkowych

$$y = a_1x + b_1 \qquad y = a_2x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$

– są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$

- **<u>Symetria</u>**

Oś symetrii – prosta, względem której przekształcając figurę w symetrii osiowej otrzymujemy taką samą figurę; punkty symetryczne względem prostej leżą na wspólnej prostej prostopadłej do osi symetrii, w równej od niej odległości, ale nie po tej samej stronie.

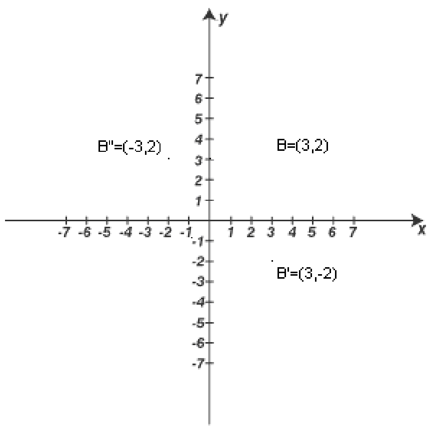
Środek symetrii - to punkt względem którego przekształcając figurę w symetrii środkowej otrzymujemy taką samą figurę; punkty symetryczne względem środka symetrii są z nim współliniowe, jednakowo od niego oddalone i leżą po różnych stronach środka symetriisaZ

Oś symetrii figury- prosta, względem której obrazem danej figury w symetrii osiowej jest ona sama.
Środek symetrii figury - punkt względem którego obrazem danej figury w symetrii środkowej jest ta sama figura.
Figury osiowosymetryczne- figury posiadające oś symetrii figury.
Figury środkowosymetryczne - figury posiadające środek symetrii figury.

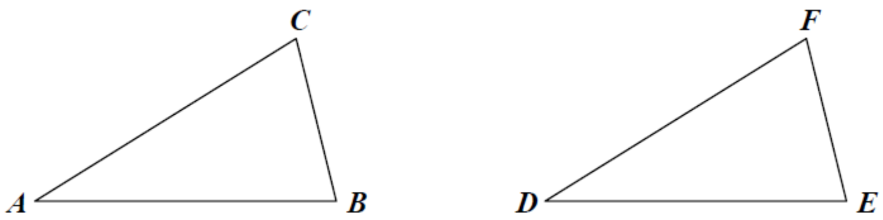
Współrzędne punktu symetrycznego do A=(x; y)względem **osi OX:** A'=(x;-y) – *druga współrzędna zmienia się na liczbę przeciwną*

Współrzędne punktu symetrycznego do A=(x; y) względem **osi OY:** A"=(-x; y) - *pierwsza współrzędna zmienia się na liczbę przeciwną*

Współrzędne punktu symetrycznego do A=(x; y) względem początku układu współrzędnych: A'''=(-x; -y) - *obie współrzędne zmieniają się na liczby przeciwne*



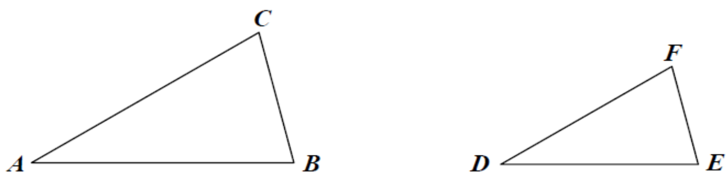
- <u>Cechy przystawania trójkątów</u>



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\Delta ABC \equiv \Delta DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawania trójkątów**:

- cecha przystawania „bok – bok – bok”:
  odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości: $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$
- cecha przystawania „bok – kąt – bok”:
  dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha przystawania „kąt – bok – kąt”:
  jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np. $|AB| = |DE|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

- <u>Cechy podobieństwa trójkątów</u>



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\Delta ABC \sim \Delta DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

- cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:
  długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$

- cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:
  długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np. $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$

- cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:
  dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające): $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$

• Wielokąty

Jednostki pola

1ha = 100a
1a = 100m ,
1m^2 = 100dm^2
1dm^2 = 100cm^2
1cm^2 = 100mm^2
1km^2 = 1000000m^2

Wielokąt wypukły –wielokąt jest wypukły jeżeli odcinek łączący dwa dowolne jego punkty zawiera się w tym wielokącie.

Wzór na **ilość przekątnych w wielokącie foremnym**: p = $\frac{n(n-3)}{2}$
n- ilość boków, p – liczba przekątnych

Wielokąt foremny - to wielokąt który ma wszystkie kąty równe i wszystkie boki równej długości.

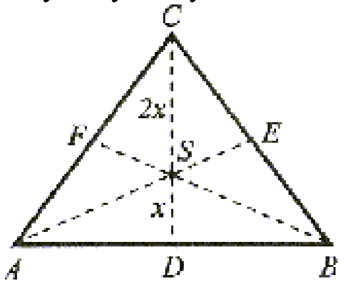
Wzór na **miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego** α = $\frac{(n-2)180}{n}$

Wzór na **sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta foremnego**: S = (n – 2)180^o

Aby **skonstruować trójkąt**, najdłuższy bok musi być krótszy od sumy długości dwóch pozostałych boków.

Wysokość trójkąta jest to odcinek wychodzący z wierzchołka trójkąta, a opuszczony prostopadle do przeciwległego boku (lub jego przedłużenia) trójkąta zwanego podstawą trójkąta. Odcinek CD z rysunku poniżej jest wysokością trójkąta

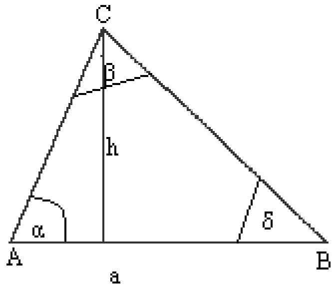
Środkowa trójkąta:
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący jego wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku tego trójkąta. Każdy trójkąt ma trzy środkowe przecinające się w jednym punkcie (S), który nazywamy **środkiem ciężkości** tego trójkąta.



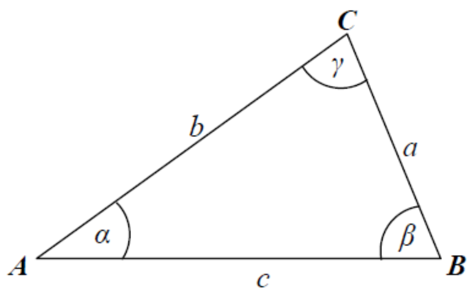
Kątem zewnętrznym trójkąta jest kąt przyległy do kąta wewnętrznego trójkąta. Jest on równy sumie 2 pozostałych kątów wewnętrznych trójkąta nie przyległych do tego kąta.

Wielokąt o 3 bokach - **trójkąt**.
Liczba równa sumie dł. boków trójkąta nazywa się **obwodem**.
Punkt przecięcia się środkowych jest **punktem ciężkości trójkąta**.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°.
α + β + δ = 180°.



Trójkąt prostokątny jest to trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych tego wielokąta jest prosty. Bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywa się przeciwprostokątną, a pozostałe jego boki to przyprostokątne. Przyprostokątne są również wysokościami trójkąta.



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie *ABC*:

a, b, c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach A, B, C

h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C

R, r – promienie okręgów opisanego i wpisanego

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie *ABC* kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

- Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Trójkąt równoboczny – jest to trójkąt, który ma wszystkie boki równej długości ***a***
i kąty wewnętrzne równe - mające po 60°.
Obwód = 3a

- Trójkąt równoboczny

a – długość boku

h – wysokość trójkąta

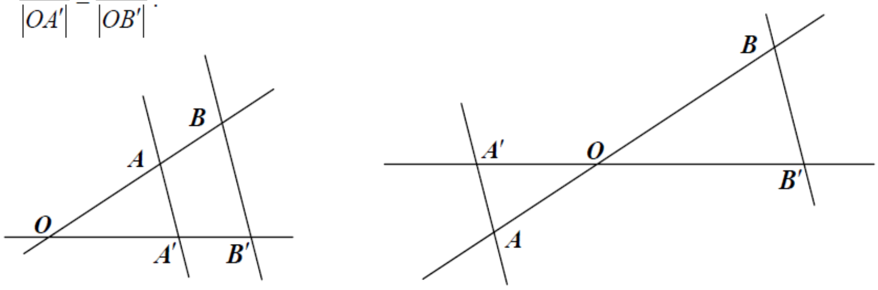
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

.

- Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste równoległe AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O, to $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$.

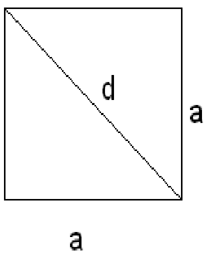


- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

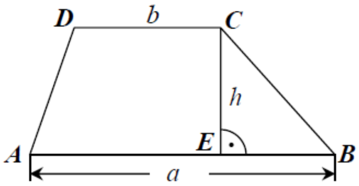
Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$, to proste AA' i BB' są równoległe.

- **Pola figur płaskich**

Kwadrat
Czworokąt, którego wszystkie boki są równe, a kąty proste. Jest wielokątem foremnym.
Ma 4 osie symetrii. $P = a^2 = 0{,}5d^2$
Przekątna: $d = a\sqrt{2}$

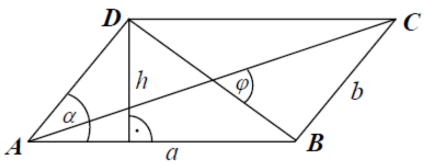


- Czworokąty



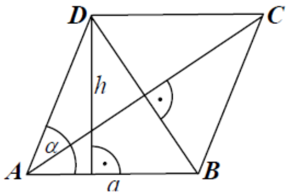
Trapez
Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



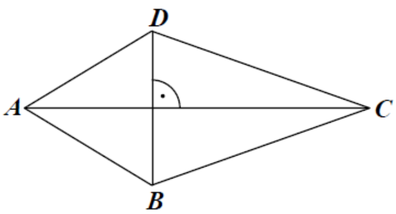
Równoległobok
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$$



Romb
Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.
Wzory na pole rombu:

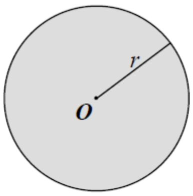
$$P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid
Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.
Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

- Koło



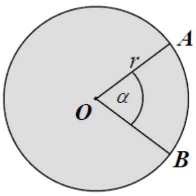
Wzór na pole koła o promieniu r:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r:

$$Ob = 2\pi r$$

- Wycinek koła

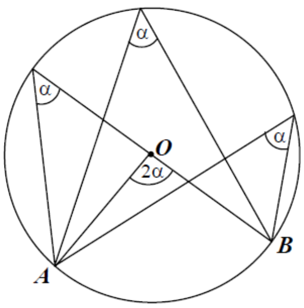


Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach: $l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$

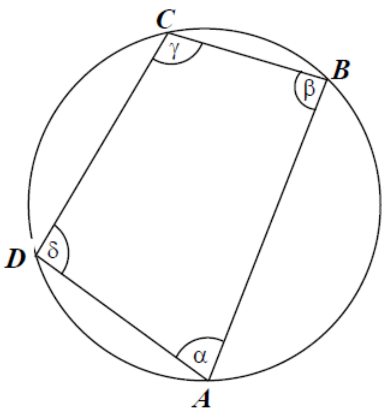
- Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

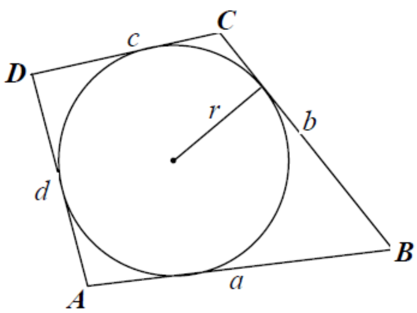
- Okrąg opisany na czworokącie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- Okrąg wpisany w czworokąt



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

- **Figury przestrzenne**

Jednostki objętości

1 km^3 = 1000^3 m^3
1 m^3 = 10^3 dm^3
1 dm^3 = 10^3 cm^3
1 cm^3 = 10^3 mm^3
1 mm^3 = 0,1^3 cm^3
1 hl = 100 l
1 l = 1 dm^3
1 ml = 1 cm^3

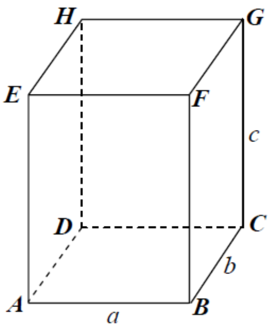
Graniastosłup prawidłowy-
to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.
Ostrosłup prawidłowy – jego podstawą jest wielokąt foremny, a ściany boczne są przystającymi trójkątami.

Graniastosłup prosty-
graniastosłup, którego boczne krawędzie są prostopadłe do obydwu podstaw

- Oznaczenia

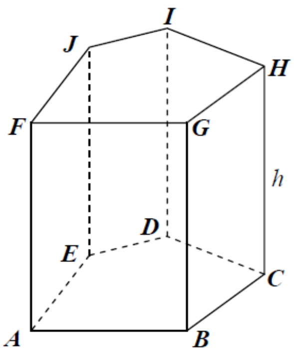
  P – pole powierzchni całkowitej
  P_p – pole powierzchni podstawy
  P_b – pole powierzchni bocznej
  V – objętość

- Prostopadłościan



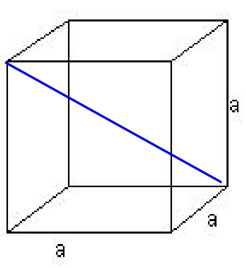
$P = 2(ab + bc + ac)$
$V = abc$
gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

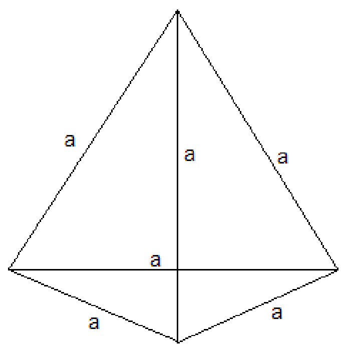
- Graniastosłup prosty



$P_b = 2p \cdot h$
$V = P_p \cdot h$
gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa

Sześcian





Pc = $6a^2$
V= a^3
Długość przekątnej D= $a\sqrt{3}$

Czworościan foremny- ostrosłup, którego cztery ściany (podstawa i wszystkie ściany boczne) są przystającymi trójkątami równobocznymi.

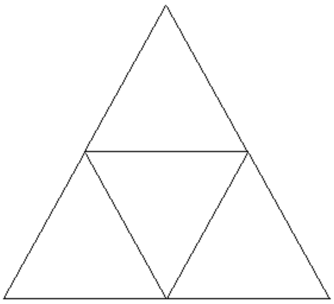
Czworościan

$P_c = a^2\sqrt{3}$

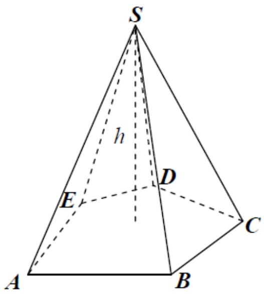
$V = \sqrt{2}\,\frac{a^3}{12}$

$h = a\sqrt{2/3}$

Siatka czworościanu foremnego:



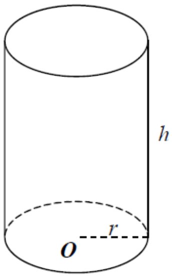
- Ostrosłup



$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

- Walec



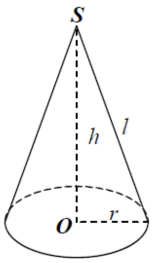
$P_b = 2\pi rh$

$P = 2\pi r(r+h)$

$V = \pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h wysokością walca

- Stożek



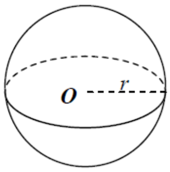
$P_b = \pi rl$

$P = \pi r(r+l)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy,
h wysokością, l długością tworzącej stożka

- Kula



$P = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

gdzie r jest promieniem kuli

9. Statystyka

Średnia arytmetyczna - suma wszystkich liczb podzielona przez ich ilość.

Moda - m_o – najczęściej występująca dana w pewnym zbiorze danych (w próbie)

Mediana - m_e (dwa przypadki):

1. Środkowy wynik wśród niemalejąco uporządkowanych danych. (dla nieparzystej próby)
2. Jeżeli liczba danych jest parzysta, to mediana jest średnią arytmetyczną dwóch „środkowych” wyników, np. dla liczb 2, <u>2, 3</u>, 3, $m_e = (2+3):2 = 5:2 = 2{,}5$

Rozstęp z próby (R) – różnica między największą i najmniejszą daną.

Częstość występowania – częstotliwością występowania jest nazywana liczba m/n będąca ilorazem m (liczebność danej zmiennej) przez n (liczebność wszystkich danych).

Zamiana % na stopnie i stopni na % przy diagramach kołowych:

$100\% = 360^o$

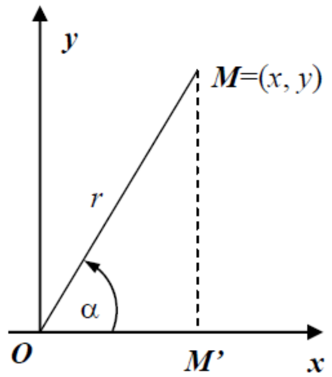
$1\% = 3{,}6^o$

$1^o = 5/18\ \%$

Wzory nadobowiązkowe

12. Trygonometria

- Definicje funkcji trygonometrycznych



$\sin\alpha = \frac{y}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, gdy $x \neq 0$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

- Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k - \text{całkowite}$$

- Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje